ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

• Tek ve çift fonksiyonlar:

$f: [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $\forall x \in [-a, a]$ iken

$f(-x) = f(x)$ oluyorsa fonksiyon **çift fonksiyon**, $f(-x) = -f(x)$ oluyorsa fonksiyon **tek fonksiyon**'dur.

- $f(x) = x^2$

  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 \Rightarrow f(-x) = f(x)$ (**çift**)
- $f(x) = x^3$

  $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$ (**tek**)
- $f(x) = x^2 + 1$ (**çift**)
- $f(x) = x^3 + x$ (**tek**)
- $f(x) = \sin x$ (**tek**)
- $f(x) = \cos x$ (**çift**)
- $f(x) = |x|$ (**çift**)
- $f(x) = x^2 + x + 1$ (**ne tek ne çift**)

☺ Çift fonksiyonlarda tek kuvvet, tek fonksiyonlarda çift kuvvet bulunmaz.

> • Tek fonksiyonlar orijine göre simetrik, çift fonksiyonlar y eksenine göre simetriktir.

1) $f(x) = (a+2)x^3 + (2a+b+1)x^2 + (b-1)x + 4$ fonksiyonu çift fonksiyon ise $f(1)$ nedir?

$f(x) = \underbrace{(a+2)}_{0}x^3 + (2a+b+1)x^2 + \underbrace{(b-1)}_{0}x + 4$

$a = -2$
$b = 1$

$f(x) = -2x^2 + 4$

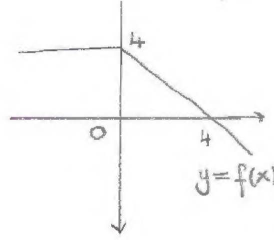
$f(1) = -2 + 4 \Rightarrow f(1) = 2$

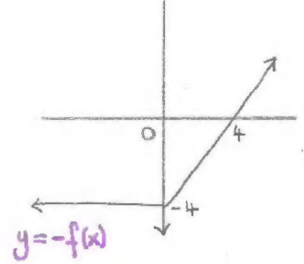
2) $f(x) = x^3 + (a-3)x^2 + 5x - 3b + 15$ fonksiyonunun tek fonksiyon olması için $a.b$ kaç olmalıdır?

$f(x) = x^3 + \underbrace{(a-3)}_{0}x^2 + 5x \underbrace{-3b+15}_{0}$

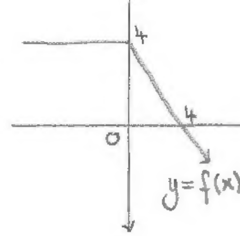
$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ b = 5 \end{array}\right\} a.b = 15$

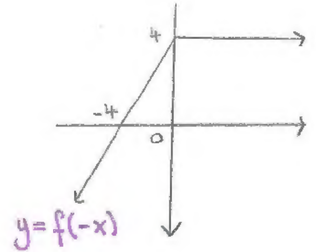
☺ • $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiş iken $y = -f(x)$ in grafiği isteniyorsa ox eksenine göre simetri alınır.



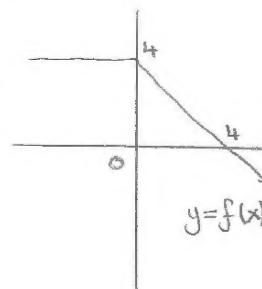


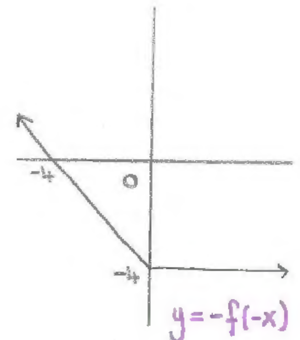
• $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiş iken $y = f(-x)$ in grafiği isteniyorsa oy eksenine göre simetri alınır.



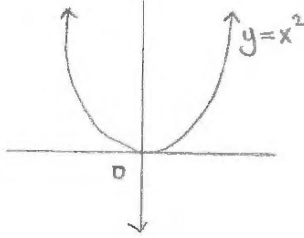


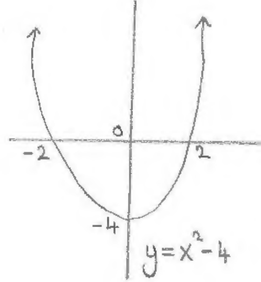
• $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiş iken $y = -f(-x)$ in grafiği isteniyorsa orijine göre simetri alınır.



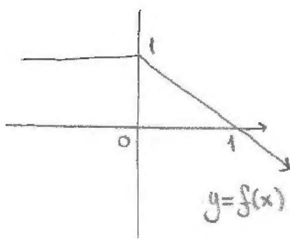


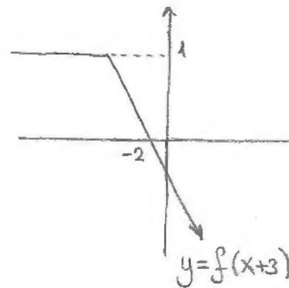
- $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiş iken $y=f(x)+a$ fonksiyonunun grafiği istenirse
  - $a>0$ ise fonksiyon y ekseninin pozitif yönünde a birim ötelenir.
  - $a<0$ ise fonksiyon y ekseninin negatif yönünde a birim ötelenir.





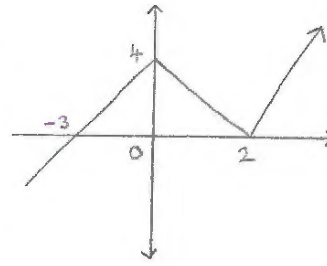
- $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiş iken $y=f(x+a)$ fonksiyonunun grafiği istenirse
  - $x+a=0 \Rightarrow x=-a$ bulunur ve $-a>0$ ise fonksiyon x ekseninin pozitif yönünde a birim ötelenir.
  - $x+a=0 \Rightarrow x=-a$ bulunur ve $-a<0$ ise fonksiyon x ekseninin negatif yönünde a birim ötelenir.





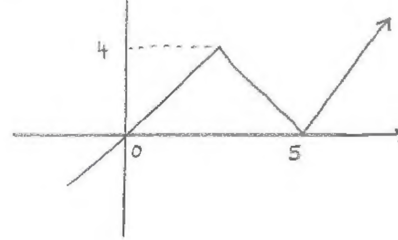
- $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiş iken
  - $y=|f(x)|$ sorulursa x ekseninin üzerinde kalan kısım aynı bırakılır ve altında kalan kısmın x eksenine göre simetriği alınarak yukarıya taşınır.
  - $y=f(|x|)$ sorulursa sağ tarafta kalan kısım aynı bırakılır ve sağda kalan kısmın y eksenine göre simetriği alınır.

3)

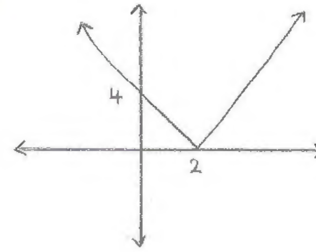


Yandaki şekil $y=f(x)$ fonksiyonuna aittir. Buna göre $y=f(x-3)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz?

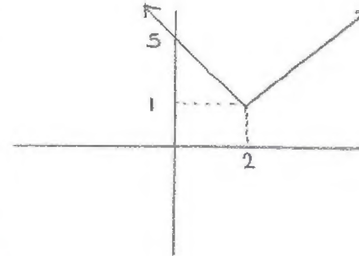
$x-3=0 \Rightarrow x=3>0$ olduğundan 3 birim sağa ötelenir.



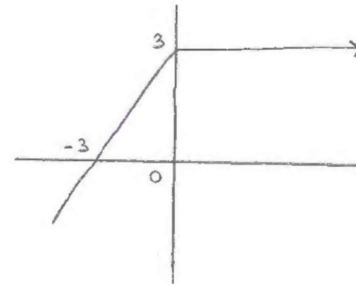
4)



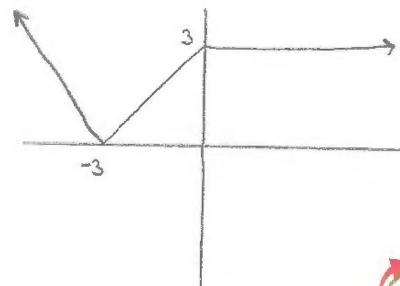
$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $y=f(x)+1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz?



5)



$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $y=|f(x)|$ in grafiğini çiziniz?



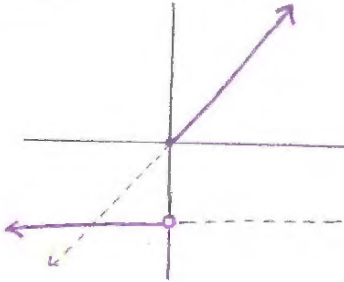
• Parçalı fonksiyon:

Tanım kümesinin alt aralıklarında ayrı birer fonksiyon olarak tanımlanan fonksiyonlardır.

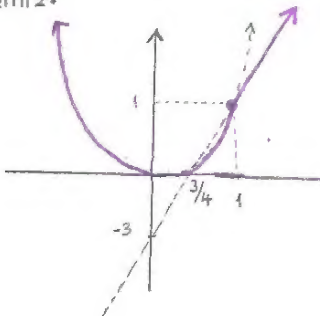
$$y=\begin{cases} f(x), & x\leq a \\ g(x), & a<x<b \\ h(x), & x\geq b \end{cases}$$

☺ a ve b noktaları kritik noktalardır.

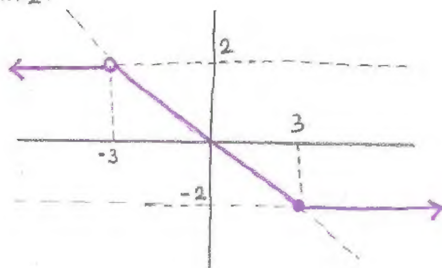
6) $y=\begin{cases} 2x, & x\geq 0 \\ -2, & x<0 \end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



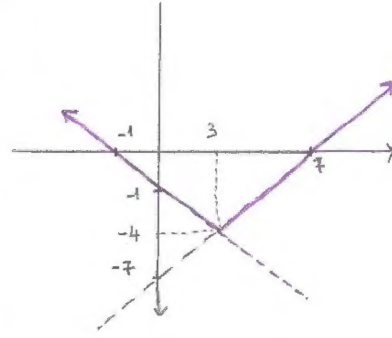
7) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leq 1 \\ 4x-3, & x>1 \end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



8) $y=\begin{cases} 2, & x<-3 \\ \frac{-2x}{3}, & -3\leq x\leq 3 \\ -2, & x>3 \end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



9) $f(x)=\begin{cases} x-7, & x\geq 3 \\ -x-1, & x<3 \end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



• Mutlak değer fonksiyonunun grafiği:

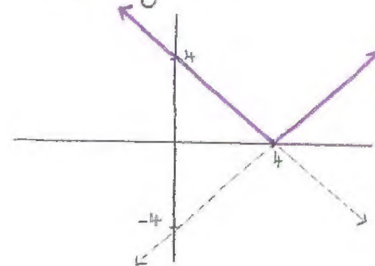
$$|f(x)|=\begin{cases} f(x), & f(x)\geq 0 \\ -f(x), & f(x)<0 \end{cases}$$

☺ İçini sıfır yapan noktaya göre iki farklı durumda incelenir.

10) $f(x)=|x-4|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

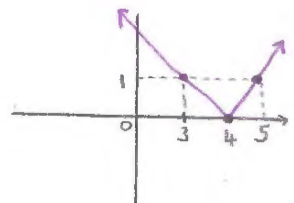
$x\geq 4$ için $y=x-4$

$x<4$ için $y=-x+4$



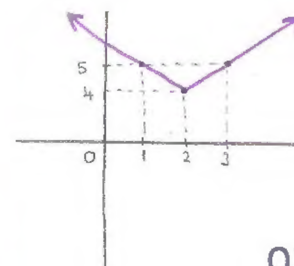
II. yöntem:

x	3	4	5
y	1	0	1



11) $f(x)=|x-2|+4$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

x	1	2	3
y	5	4	5

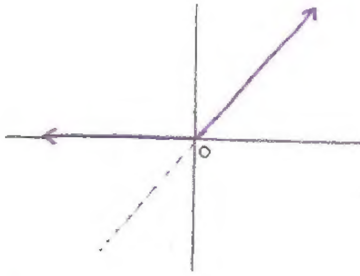


12) $2y = x + |x|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz?

$x \geq 0$ için $2y = x + x \Rightarrow y = x$

$x < 0$ için $2y = x + (-x) \Rightarrow y = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x &, x \geq 0 \\ 0 &, x < 0 \end{cases}$$

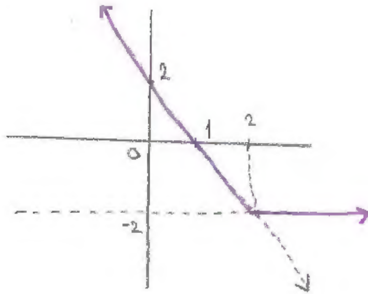


13) $f(x) = |2-x| - x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz?

$x \geq 2$ için $y = -2 + x - x \Rightarrow y = -2$

$x < 2$ için $y = 2 - x - x \Rightarrow y = 2 - 2x$

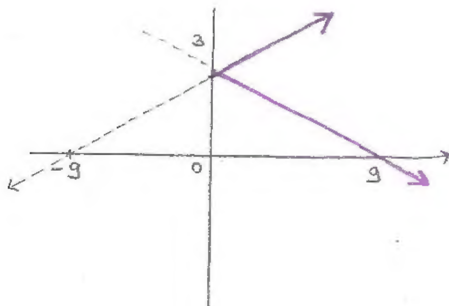
$$f(x) = \begin{cases} -2 &, x \geq 2 \\ 2 - 2x &, x < 2 \end{cases}$$



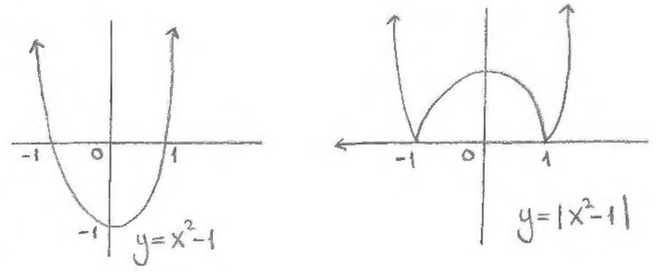
14) $|3y - 9| - x = 0$ bağıntısının grafiğini çiziniz?

$y \geq 3$ için $3y - 9 - x = 0$

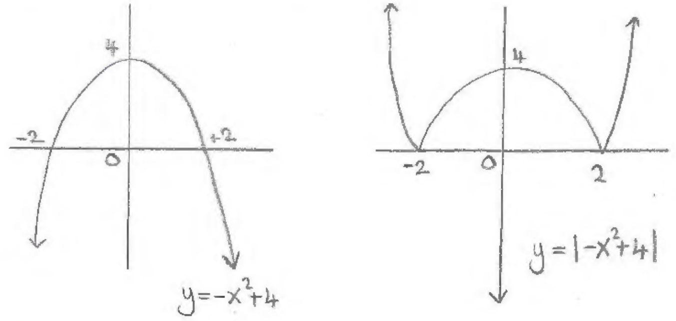
$y < 3$ için $-3y + 9 - x = 0$



15) $f(x) = |x^2 - 1|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz?



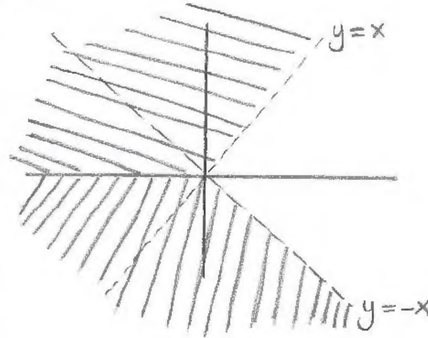
16) $y = |-x^2 + 4|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz?



17) $x - |y| < 0$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz?

$y \geq 0$ için $x - y < 0$

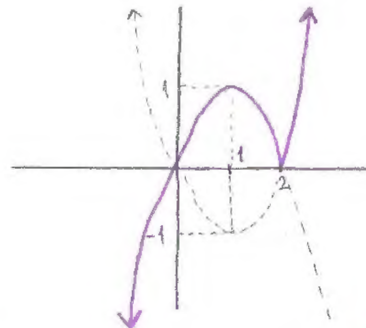
$y < 0$ için $x + y < 0$



18) $y = x.|x-2|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz?

$x \geq 2$ için $y = x.(x-2) \Rightarrow y = x^2 - 2x$

$x < 2$ için $y = x.(-x+2) \Rightarrow y = -x^2 + 2x$



☺ $f(x)=|x\pm a|\pm|x\pm b|$

(+) iken → en küçük değeri vardır.

(−) iken → en büyük / en küçük

• En büyük ve en küçük değerini kritik noktalarda alır.

19) $f(x)=|x-7|+|x+3|$ fonksiyonunun alacağı en küçük değer kaçtır?

$x=7$ için $y=10$
$x=-3$ için $y=10$ } en küçük 10 olur.

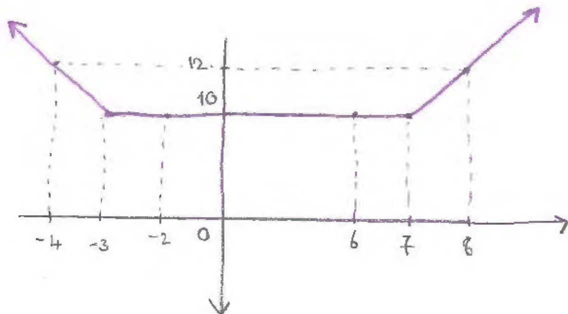
20) $f(x)=|x-3|-|x-5|$ fonksiyonu kaç farklı tam sayı değeri alır?

$x=3$ için $y=-2$ (en küçük)
$x=5$ için $y=2$ (en büyük)

alacağı değerlerin aralığı $[-2,2]$
⇓
5 tanedir.

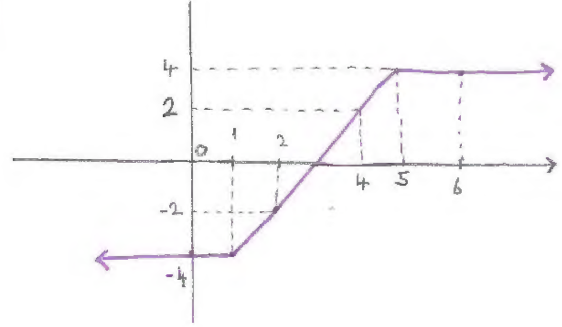
21) $y=|x-7|+|x+3|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz?

x	6	7	8	-4	-3	-2
y	10	10	12	12	10	10

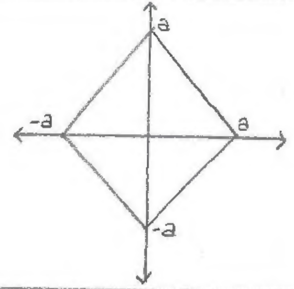


22) $y=|x-1|-|x-5|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz?

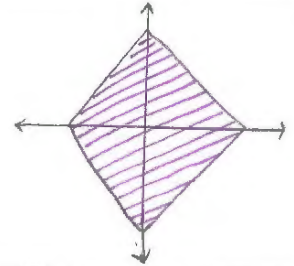
x	0	1	2	4	5	6
y	-4	-4	-2	2	4	4



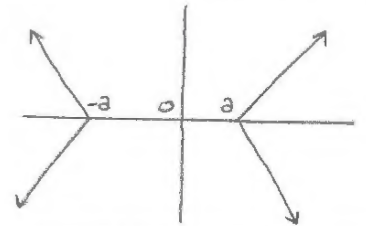
• $|x|+|y|=a$ ⇒



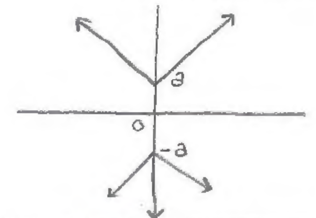
$|x|+|y|\leq a$ ⇒



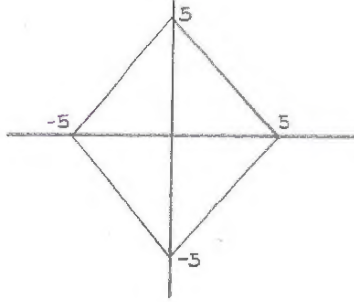
$|x|-|y|=a$ ⇒



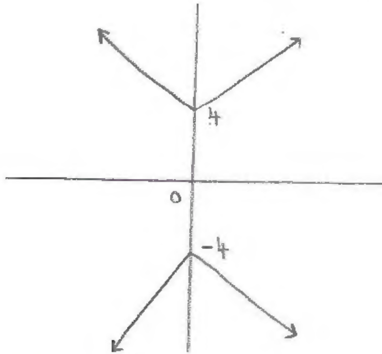
$|y|-|x|=a$ ⇒



23) $|x|+|y|=5$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz?



24) $|y|-|x|=4$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz?



☺ $|x|+|y| \leqslant a$ $(a \in Z^+,\ x,y \in Z)$

eşitsizliğini sağlayan düzlemsel bölgedeki noktalardan koordinatları tam sayı olan noktalara **kafes noktaları** denir.

Bu noktaların sayısı $a^2+(a+1)^2$ kadardır.

25) $|x|+|y| \leqslant 5$ bağıntısını sağlayan düzlemsel bölgede koordinatları tam sayı olan kaç tane (x,y) ikilisi vardır?

$a=5 \Rightarrow a^2+(a+1)^2 = 25+36 = 61$

26) $|x|+|y| \leqslant a$ $(a \in Z^+)$ bağıntısını sağlayan düzlemsel bölgedeki kafes noktaları 221 tane olduğuna göre a kaçtır?

$a^2+(a+1)^2 = 221$

$\Rightarrow a=10$

• **Fonksiyonların en geniş tanım kümesi:**

• $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$ polinom şeklindeki fonksiyonların tanım kümesi tüm reel sayılardır.

T.K = $\mathbb{R}$

27) $f(x) = 4x^5+3x^3-2x^2-7x+9$ fonksiyonunun tanım kümesi nedir?

T.K = $\mathbb{R}$

• $f(x) = \dfrac{P(x)}{g(x)}$ şeklinde ise

T.K = Reel sayılar $-$ { g(x)'i sıfır yapan değerler }

= $\mathbb{R}$ $-$ { paydayı sıfır yapanlar }

28) $f(x) = \dfrac{x^3+5x^2-1}{x^2-16}$ fonksiyonunun tanım kümesi nedir?

T.K = $\mathbb{R} - \{4, -4\}$

• $\sqrt[n]{f(x)}$ 'in tanım kümesi

– n çift ise T.K = $f(x) \geqslant 0$

– n tek ise T.K = $\mathbb{R}$

29) $f(x) = \sqrt{1-|x|}$ fonksiyonunun tanım kümesi nedir?

$1-|x| \geqslant 0 \Rightarrow |x| \leqslant 1$

$-1 \leqslant x \leqslant 1$ ya da $[-1, 1]$

30) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+5}{x-2}} + \sqrt[4]{x+3} + 3x+1$ fonksiyonunun tanım aralığı nedir?

$x+3 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -3$

$x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

T.K : $[-3, +\infty) - \{2\}$